Correction automatismes

Exercice 1 :

1. $a = 6$ et $b = -15$ et $c = -9$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \times 6 \times (-9) = 441 > 0$
   L'équation a deux solutions distinctes :
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-15)-\sqrt{441}}{2\times6} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-15)+\sqrt{441}}{2\times6} = 3$
   $$S = \{-\frac{1}{2}; 3\}$$
2. $a = \frac{1}{8}$ et $b = 1$ et $c = 2$; $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \frac{1}{8} \times 2 = 0$
   L'équation a une solution double : $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\times\frac{1}{8}} = -4$
   $$S = \{-4\}$$
3. $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$
   L'équation n'a pas de solution (réelle)
   $S = \emptyset$

Exercice 2 :

1. On résout en premier : $2x^2 - 5x - 42 = 0$
   $a = 2$ et $b = -5$ et $c = -42$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-42) = 361 > 0$
   L'équation a deux solutions distinctes :
   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{361}}{2\times2} = -\frac{7}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{361}}{2\times2} = 6$
   Puis on dresse un tableau de signes avec $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		6		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 5x - 42$		+	0	-	0	+	

   Puis on donne la solution de l'inéquation $S =]-\infty; -\frac{7}{2}] \cup [6 ; +\infty[$

2. $5x^2 + 8x + 1 \leq 2(x^2 + 3x)$
   $5x^2 + 8x + 1 \leq 2 \times x^2 + 2 \times 3x$ On développe
   $5x^2 + 8x + 1 - 2x^2 - 6x \leq 0$
   $3x^2 + 2x + 1 \leq 0$
   On résout en premier : $3x^2 + 2x + 1 = 0$
   $a = 3$ et $b = 2$ et $c = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$
   L'équation n'a pas de solution mais on peut dresser le tableau de signes avec $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $3x^2 + 2x + 1$		+	

   $S = \emptyset$

3. $(2x-8)(2x+8) > 2x^2+12x-82$ On développe avec une identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$
$4x^2-64 > 2x^2+12x-82$
$4x^2-64-2x^2-12x+82 > 0$
$2x^2-12x+18 > 0$
On résout en premier : $2x^2-12x+18=0$
$a = 2\ et\ b = -12\ et\ c = 18$; $\Delta = b^2-4ac = (-12)^2-4\times 2\times 18 = 0$
L'équation a une solution double :
$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-12}{2\times 2} = -3$
Puis on dresse un tableau de signes avec $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $2x^2-12x+18$		+	0	+	

$S =]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,]-3\,;\,+\infty[= \mathbb{R} / \{-3\}$

Exercice 3 :

1. $A(x) = e^{2x-1}e^{-x+1} = e^{2x-1+(-x+1)} = e^x$
2. $B(x) = \frac{e^{2-x}}{e^{1-2x}} = e^{2-x-(1-2x)} = e^{2-x-1+2x} = e^{1+x}$
3. $C(x) = \frac{e^x+e^x}{e^x} = \frac{2e^x}{e^x} = 2$
4. $D(x) = \frac{e^xe^y}{e^{x-y}} = \frac{e^{x+y}}{e^{x-y}} = e^{x+y-(x-y)} = e^{x+y-x+y} = e^{2y}$
5. $E(x) = \frac{x}{5}+\frac{1}{x} = \frac{x\times x}{5\times x}+\frac{1\times 5}{x\times 5} = \frac{x^2}{5x}+\frac{5}{5x} = \frac{x^2+5}{5x}$
6. $F(x) = \frac{3x}{x-7}+\frac{5}{x} = \frac{3x\times x}{(x-7)\times x}+\frac{5\times(x-7)}{x\times(x-7)} = \frac{3x^2}{(x-7)\times x}+\frac{5x-35}{(x-7)\times x} = \frac{3x^2+5x-35}{x^2-7x}$
7. $G(x) = \frac{x}{2x-2}+\frac{3}{x-1} = \frac{x}{2(x-1)}+\frac{3\times 2}{(x-1)\times 2} = \frac{x}{2(x-1)}+\frac{6}{2(x-1)} = \frac{x+6}{2x-2}$

Exercice 4 :

1. $A(x) = 10x-5xe^x = 2\times 5x-5x\times e^x = 5x(2-e^x)$
2. $B(x) = \frac{e^x}{7}+4xe^x = e^x\times\frac{1}{7}+4x\times e^x = e^x\left(\frac{1}{7}+4x\right)$
3. $C(x) = 3e^{-5x}+(-15x+35)e^{-5x} = e^{-5x}[3+(-15x+35)]$

   $C(x) = e^{-5x}(3-15x+35) = e^{-5x}(-15x+38)$

EXERCICE 6 1) $f(x)=10x^7-3x^4+5x+100$

On a donc $f'(x)=10\times 7x^6-3\times 4x^3+5\times 1+0$

$$\boldsymbol{f'(x)=70x^6-12x^3+5}$$

2) $f(x)=\frac{-2}{5}x^5-x+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

On a donc : $f'(x)=\frac{-2}{5}\times 5x^4-1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{f'(x)=-2x^4-1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

3) $f(x)=(3x-7)(-2x^2+8x)$ On reconnaît une fonction de la forme $f=u\times v$, on se souvient de la formule : $(u\times v)'=u'v+v'u$, on a donc :

$f'(x)=3(-2x^2+8x)+(-4x+8)(3x-7)$

$f'(x)=-6x^2+24x+(-12)x^2+28x+24x-56$

$\boldsymbol{f'(x)=-18x^2+76x-56}$

4) $f(x)=\frac{x-10}{100x+1000}$ On reconnaît une fonction de la forme $f=\frac{u}{v}$, on se souvient de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, on a donc :

$$f'(x)=\frac{1(100x+1000)-100(x-10)}{(100x+1000)^2}$$

$$f'(x)=\frac{100x+1000-100x+1000}{(100x+1000)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{2000}{(100x+1000)^2}}$$

5) $f(x)=\frac{4x+1}{2x^2+1}$ On reconnaît une fonction de la forme $f=\frac{u}{v}$, on se souvient de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, on a donc :

$$f'(x)=\frac{4(2x^2+1)-4x(4x+1)}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{8x^2+4-16x^2-4x}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-8x^2-4x+4}{(2x^2+1)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x)=\frac{-4(2x^2+x-1)}{(2x^2+1)^2}}$$

6) $f(x)=e^{-3x}$ On reconnaît une fonction de la forme $f(x)=e^{ax+b}$, on se souvient que $(e^{ax+b})'=ae^{ax+b}$. On a ici $a=-3$ et $b=0$, on a donc :

$\boldsymbol{f'(x)=-3e^{-3x}}$

7) $f(x)=x^2 e^x$. On reconnaît une fonction de la forme $f=u\times v$, on se souvient de la formule : $(u\times v)'=u'v+v'u$, on a donc :

$f'(x)=2xe^x+e^x x^2$
$\boldsymbol{f'(x)=(x^2+2x)e^x}$

8) $f(x)=xe^{-x}$ Même chose pour cette fonction, on a donc :

$f'(x)=1e^{-x}+(-e^{-x})x$
$\boldsymbol{f'(x)=(1-x)e^{-x}}$

<u>EXERCICE 7</u> 1) $f(0)=1$ $f(-1)=3$ $f(2)=3$

2) Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est **-3**.
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -1 est **0**.
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est **9**.

3) L'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $\boldsymbol{y=3}$.
4) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $\boldsymbol{y=-3x+1}$.

<u>EXERCICE 8</u> $f(x)=2x^3-3x^2-36x+30$

La méthode est de dériver la fonction, puis d'étudier le signe de sa dérivée.

$f'(x)=2\times 3x^2-3\times 2x-36+0$
$f'(x)=6x^2-6x-36$
$\boldsymbol{f'(x)=6(x^2-x-6)}$

Pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de x^2-x-6 . Etudions le signe de ce polynôme du second degré . On a $a=1$, $b=-1$ et $c=-6$.

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=25>0$
L'équation $x^2-x-6=0$ admet deux solutions réelles :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-2$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$

On a ici $a>0$, donc x^2-x-6 est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur, on en déduit le tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$		+	0	-	0	+	
$\boldsymbol{f(x)}$		↗	74	↘	-51	↗	

Correction exercice 9 :

1) Calculons la fonction dérivée de f. On reconnaît que f est de la forme d'un produit. Par ailleurs, on rappelle que $(u.v)' = u'v + uv'$, où u et v sont deux fonctions.

Ici, $u(x) = x + 1$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

On a donc $f'(x) = 1.e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ (on a factorisé pour pouvoir étudier le signe).

Désormais, étudions le signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	

2)On rappelle que la tangente à la courbe représentative de f en "a" a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici, on veut la tangente en 0 : donc $a = 0$. L'équation devient $y = f'(0).x + f(0)$ On calcule désormais $f(0)$ et $f'(0)$ pour compléter l'équation :

$f(0) = (0 + 1)e^0 = 1$

$f'(0) = (0 + 2)e^0 = 2$

Donc l'équation devient $y = 2x + 1$.

Exercice 5

1) $e^{-3x}=e^{x+1}$

D'après les propriétés de la fonction exponentielle : $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$

$e^{-3x}=e^{x+1} \Leftrightarrow -3x=x+1 \Leftrightarrow -4x=1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{4}$, donc l'ensemble de solutions est $S=\{-\frac{1}{4}\}$

2)

D'après les propriétés de la fonction exponentielle : $pour\,tout\; x\in\mathbb{R}, e^x>0$

$e^{-2x}=0$ ne possède pas de solution : $S=\emptyset$

3) $e^{2x+7}\geq 1$

D'après les propriétés de la fonction exponentielle : $e^0=1$

$e^{2x+7}\geq 1 \Leftrightarrow e^{2x+7}\geq e^0$

D'après la croissance de la fonction exponentielle : $e^a\geq e^b \Leftrightarrow a\geq b$

$e^{2x+7}\geq e^0 \Leftrightarrow 2x+7\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -7 \Leftrightarrow x\geq \frac{-7}{2}$

donc l'ensemble de solutions est $S=[-\frac{7}{2};+\infty[$

4) $e^{-x}\leq e^x$

D'après la croissance de la fonction exponentielle : $e^a\geq e^b \Leftrightarrow a\geq b$

$e^{-x}\leq e^x \Leftrightarrow -x\leq x \Leftrightarrow -2x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{0}{-2} \Leftrightarrow x\geq 0$

donc l'ensemble de solutions est $S=[0;+\infty[$

5) $e=e^1$ donc $e^x>e \Leftrightarrow e^x>e^1$

D'après <u>la stricte croissance</u> de la fonction exponentielle : $e^a>e^b \Leftrightarrow a>b$

$e^x>e^1 \Leftrightarrow x>1$

donc l'ensemble de solutions est $S=]1;+\infty[$

Exercice 8

$f(x)=2x^3-3x^2-36x+30$

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, comme fonction polynôme.

$f'(x)=6x^2-6x-36$

f' est un polynôme du deuxième degré, on étudie son signe à l'aide du discriminant :

$\Delta=(-6)^2-4\times6\times(-36)=900$

$\Delta\geq0$, donc f' possède deux racines distinctes

$x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{900}}{12}$ et $x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{900}}{12}$

$x_1=\dfrac{6-30}{12}=\dfrac{-27}{12}=\dfrac{-9}{4}$ $x_2=\dfrac{6+30}{12}=\dfrac{36}{12}=3$

De plus, le coefficient dominant étant $a=6$, on en déduit

x	$-\infty$		$\frac{-9}{4}$		3		$+\infty$
Signe de f'		$+$	0	-	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\frac{-9}{4})$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Il y a un maximum local en $\dfrac{-9}{4}$ et un minimum local en 3

Exercice 13

	Seconde (S)	Première (P)	Terminale (T)	Total
Filles	190	220	190	600
Garçons	210	200	170	580
Total	400	420	360	1180

Après avoir calculé les différentes totaux, nous pouvons répondre aux questions :

A=L'élève choisi est un élève de seconde.
B=L'élève choisi est une fille de première.
C=L'élève choisi est une fille sachant que c'est une élève de première.
D=L'élève choisi est un élève de terminale sachant que c'est un garçon.

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité :

1) $P(A)=\frac{400}{1180}$

2) $P(B)=\frac{220}{1180}$

3) $P(C)=\frac{220}{420}$

4) $P(D)=\frac{170}{580}$

Exercice 14

1) $d_1 = 50$

$d_2 = d_1 \times 0.99$ (on se rappelle que diminuer de 1% revient à multiplier par 0.99)

$d_2 = 50 \times 0.99 = 49.5$

$d_3 = d_2 \times 0.99 = 49.5 \times 0.99 = 49.005$

2) Diminuer de 1% revient à multiplier par 0.99, donc :

$d_{n+1} = d_n \times 0.99$

On reconnaît alors que (d_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.99$ et de premier terme $d_1 = 50$

3) $d_n = d_1 \times q^{n-1}$ donc, pour tout entier $n \geq 1$, $d_n = 50 \times 0.99^{n-1}$

4) On note $L_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$

Pour déterminer L_n , on peut utiliser une formule calculant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$L_n = d_1 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$L_n = 50 \times \frac{1 - 0.99^n}{1 - 0.99}$$

$$L_n = 50 \times \frac{1 - 0.99^n}{0.01}$$

$$L_n = \frac{50}{0.01} \times (1 - 0.99^n)$$

$L_n = 5000 \times (1 - 0.99^n)$, $L_n = 5000 - 5000 \times 0.99^n$

5) A la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est croissante et converge lentement vers 5000. La limite n'étant jamais atteinte, le globe-trotter n'atteindra sa destination qu'en une infinité de jours, c'est à dire jamais .

De plus $L_n = 5000 \times (1 - 0.99^n)$ ou encore $L_n = 5000 - 5000 \times 0.99^n$, comme $5000 \times 0.99^n \geq 0$

On peut donc affirmer que $L_n < 5000$

Il est donc facile de voir que le globe-trotter , n'atteindra jamais sa destination.

Exercice 10 : SUITES (1)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$.

1. Calculer les 4 premiers termes.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé :

1.

u_1 = ${u_0}^2 + u_0 + 1$ donc u_1 = $1^2 + 1 + 1$ = 3

u_2 = ${u_1}^2 + u_1 + 1$ donc u_2 = $3^2 + 3 + 1$ = 13

u_3 = ${u_2}^2 + u_2 + 1$ donc u_3 = $13^2 + 13 + 1$ = 183

u_4 = ${u_3}^2 + u_3 + 1$ donc u_4 = $183^2 + 183 + 1$ = 33 673

2.

$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$ donc $u_{n+1} - u_n$ = ${u_n}^2 + 1$

Comme un carré est positif ou nul alors ${u_n}^2 \geq 0$ et ${u_n}^2 + 1 \geq 1 > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n$ > 0 pour toutes les valeurs de n appartenant à $\mathbb{N}$.

On en déduit que la suite est strictement croissante.

Exercice 11 : SUITES (2)

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de *n*. En déduire u_{12} .
2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
4. Calculer $S = \sum_{i=0}^{12} u_i = u_0 + u_1 + ... + u_{12}$.

Corrigé :

1. $u_n = 8 + 3n$ et $u_{12} = 8 + 3 \times 12 = 44$
2. La suite est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n$ > 0. En effet $u_{n+1} - u_n$ = 3.
3. La limite de la suite (u_n) semble être $+\infty$.
4.

$S = 8 + (8 + 3 \times 1) + (8 + 3 \times 2) + \cdots + (8 + 3 \times 12)$

$S = 8 \times 13 + 3 \times (1 + 2 + \cdots + 12)$

$S = 104 + 3 \times \frac{12 \times 13}{2}$

S = 338

Exercice 12 : SUITES (3)

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire v_9.
2. Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?
3. Conjecturer la limite de la suite (v_n).
4. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_9$.

Corrigé :

1. $v_n = 3 \times 2^n$

$v_9 = 3 \times 2^9 = 1\,536$

2. La suite (v_n) est strictement croissante car sa raison est supérieure à 1.

3. La limite de la suite (v_n) semble être $+\infty$.

4.

$S = 3 \times 1 + (3 \times 2^1) + (3 \times 2^2) + \cdots + (3 \times 2^9)$

$S = 3 \times (1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9)$

$S = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2}$

S = 3 069

Exercice 16 : ÉTUDE DE SUITE(3)

Pour améliorer vos vacances, je vous propose de vous donner 2500 euros par jour pendant 14 jours.
En contrepartie je demande peu de choses :
Le 1er jour vous me donnez 3 centimes.
Le 2ème jour vous me donnez 9 centimes.
Le 3ème jour 27 centimes, le 4ème jour 81 centimes...
Et vous triplez chaque jour la somme du jour qui précède, et ainsi de suite pendant 14 jours.
Êtes-vous assez fou pour refuser mon offre ?

Corrigé :

On calcule la somme qu'il faudrait donner si on acceptait cette offre :

S = $0{,}03 \times 1 + 0{,}03 \times 3 + 0{,}03 \times 3^2 + \cdots + 0{,}03 \times 3^{13}$

S = $0{,}03 \times (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{13})$

S = $0{,}03 \times \frac{1-3^{14}}{1-3}$

S = 71 744,52

Alors que $2\,500 \times 14 = 35\,000$

Si on acceptait l'offre, on devrait payer 71 744,52 € et on recevrait seulement 35 000 €.
Il vaut donc mieux refuser cette offre !

<u>Remarque</u> :
Nous ne sommes même pas obligés de calculer S.
En effet le 14ème jour, il faudrait donner $0{,}03 \times 3^{13} = 47\,829{,}69$ € qui est déjà supérieur à 35 000 €.
L'offre serait avantageuse si elle ne durait que 13 jours.

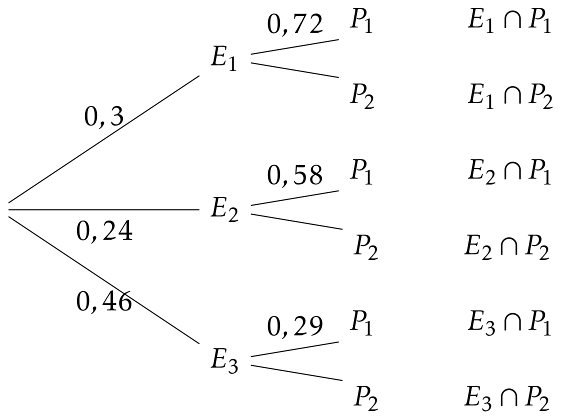
Exercice 15.
Soit (u_n le nombre de cigarette fumées chaque jour.
On a $u_0 = 20$
Puisque il fume)chaque jour deux cigarettes de moins que la veille, on a la formule de récurrence suivant :

$$u_{n+1} = u_n - 2$$

(u_n) est donc arithmétique de premier terme $u_0 = 20$ et de raison $r = -2$
donc $u_n = u_0 + nr = 20 - 2n$

1. l'arrêt de la cigarette correspond à l'équation $u_n = 0 \Longleftrightarrow 20 - 2n = 0 \Longleftrightarrow n = 10$
   Il met 10 jours à arrêter de fumer
2. Le nombre de cigarette fumée par rapport à un arrêt immédiat est :
   $S = \sum_1^9 u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = \dfrac{9 \times (u_1 + u_9)}{2}$ car (u_n) est arithmétique.
   $S = \dfrac{9 \times (18 + 2)}{2} = 45$
   Le nombre de cigarette fumée en plus par rapport à un arrêt immédiat est de 45.

Exercice 17.

1. 

2. $P(E_3 \cap P_1) = P(E_3) \times P_{E_3}(P_1) = 0,46 \times 0,29$
3. $P(P1) = P(P_1 \cap E_1) + P(P_1 \cap E_2) + P(P_1 \cap E_3) = P(E_1) \times P_{E_1}(P_1) + P(E_2) \times P_{E_2}(P_1) + P(E_3) \times P_{E_3}(P_1)$
4. $P_{P_1}(E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap P_1)}{P(P_1)}$

Exercice 18.

1. $h(t) > 5 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t + 1 > 5 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t - 4 > 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times (-5) \times (-4) = 64 > 0$
   $t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 + 8}{-10} = 0,4$
   $t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 - 8}{-10} = 2$

t	0		0.4		2		$+\infty$
signe de $-5t^2 + 12t - 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   le centre de gravité se trouve à plus de 5 mètres de hauteur entre 0,4sec et 2 sec.
2. $h(t) > 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t + 1 > 9 \Leftrightarrow -5t^2 + 12t - 8 > 0$
   $\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \times (-5) \times (-8) = -16 < 0$
   Le polynôme du 2nde degré n'a pas de racine : il est donc toujours du signe de $a = -5$.
   L'inéquation n'a donc pas de solution et le centre de gravité ne peux donc pas se situer à plus de 9m.

Exercice 19.

1. $x + y = 20$ donc $y = 20 - x$
2. $P > 91 \iff xy > 91 \iff x(20-x) > 91 \iff 20x - x^2 > 91 \iff -x^2 + 20x - 91 > 0$
   $(x-7)(13-x) > 0 \iff 13x - x^2 - 91 + 7x > 0 \iff -x^2 + 20x - 91 > 0$
   Les 2 inéquations sont équivalentes.

t	$-\infty$		7		13		$+\infty$
signe de $x-7$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $13-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $(x-7)(13-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Les solutions du problème sont les couples $(x;y)$ où $x \in]\,7\,;\,13\,[$ et $y = 20 - x$

Exercice 20.

$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$

1. $M(\ x\ ; f(x))$; $N(\ x\ ;0\ )$; $P(\ 0\ ; f(x))$;
2. $A(x) = OP \times ON = f(x) \times x = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \times x = \left(x^2 + x\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$
3. A est dérivable (comme produit de fonctions dérivables) et
   $A(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + \left(x^2+x\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} = \left((2x+1) - \frac{3}{2}\left(x^2+x\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} = \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$
   Puisque $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} > 0$ pour tout réel x, $A'(x)$ est du signe de $\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)$
   $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times 1 = \frac{25}{4} > 0$
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{4}{3}$
   $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = 2$
   Or $x_1 < 0$ et $x_2 \in [0;3]$

x	0		2		3
signe de $A'(x)$		$+$	0	$-$	
var. A	0	$\nearrow$	$A(2)$	$\searrow$	$A(3)$

   $A(2) = 6\mathrm{e}^{-3}$ et $A(3) = 12\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}$
4. L'aire est maximale pour $x = 2$, c'est à dire lorsque M a pour coordonnées
   $(\ 2\ ;\ f(2))$ soit $\left(\ 2\ ;\ 3\mathrm{e}^{-3}\right)$